Шифр: С-14

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап

2018/2019
Ленинградская область

Район Гатчинский

Школа Сиверская гимназия

Класс 11

ФИО Бурьян Ирина Николаевна

C-14

1	2	3	4	5	Σ
5	~~1~~ 4	0	x	x	~~7~~ 9

$\boxed{11.2}$ 1) Пусть x_1, x_2 – корни (x^2+ax+b). Тогда по т. Виета:

$x_1+x_2=-a$ Т.к. x_1, x_2 по условию целые, то и $a, b \in \mathbb{Z}$

$x_1 \cdot x_2 = b$

2) $D_1=a^2-4b \geq 0$

$D_2=a^2-4b-4 \geq 0$ при этом т.к. $x_{1,2}=\frac{-a \pm \sqrt{D}}{2}$, (если оно нецелое, то и разность нецелая)

а a – целое, то и $\sqrt{D}$ – целое число, тогда и D – целое число, полный квадрат

Пусть $a^2-4b=p^2$; $a^2-4b-4=q^2$ $p, q, m \in \mathbb{Z}$, т.к. все $D \in \mathbb{Z}$

Для ~~x^2+b~~ $(x^2+ax+b+2)$ $D_3=a^2-4b-8=m^2$

$m^2 \underset{+4}{\longrightarrow} q^2 \underset{+4}{\longrightarrow} p^2$ Т.е. мы имеем 3 целых числа, квадраты кот. составляют арифм. прогрессию с разностью 4.

Но существует только два числа, разность между квадратами которых равная 4: 2^2 и 0^2.

3) Докажем, что такие p, q и m не существуют.

Рассмотрим ряд квадратов целых чисел:

$\underbrace{0 \quad 1 \quad 4}_{+4} \quad 9 \quad 16 \quad 25 \ldots\ldots$

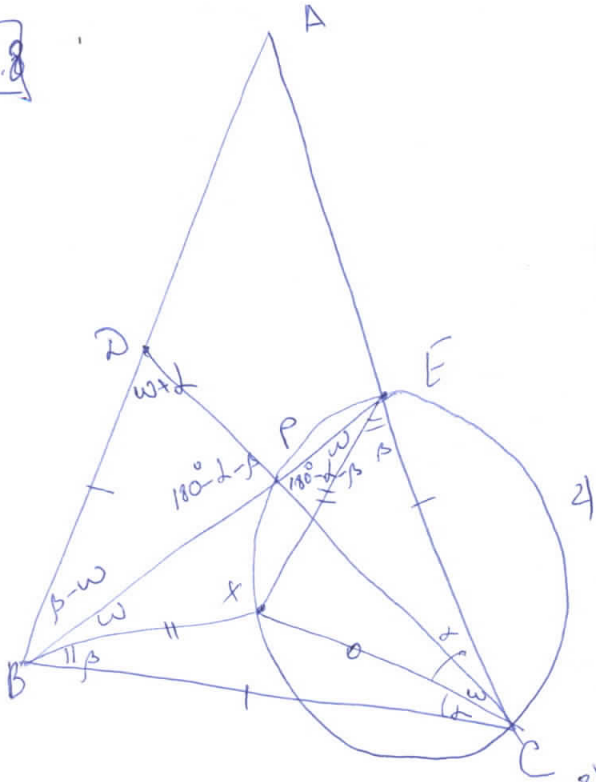
Пусть $p, q, m > 2$ Тогда $p^2-q^2 \neq 4$; $q^2-m^2 \neq 4$, т.к. при числах, больших 2, ~~$(2k+1)^2-2k^2=4k+1$, и при $k>0$ эта разность больше 4.~~ разность между квадратами двух соседних чисел нечётна ($(2k+1)^2-(2k)^2=4k+1$; $(2k)^2-(2k-1)^2=4k-1$) и больше 4* (при $k>1$). А если разность между 2-мя соседними квадратами чисел >4, то между несоседними она ещё больше. Т.о. p, q, m не существуют. ~~Т.е. $(x^2+ax+b+2)$ не имеет~~ Но существуют p и q: $p=2$; $q=0$, $D_1=4=a^2-4b$. Тогда $D_3=D_1-8=-4<0$, т.е. $(x^2+ax+b+2)$ не имеет корней, т.к. дискриминант отрицательный.

$\boxed{11.1}$ Условно пронумеруем рыцарей от 1 до 10. Заметим, что №9 и №10 точно лжецы, т.к. в 1-ый раз они сказали „>9" и „>10" соотв. Если бы они были рыцарями (или хотя бы один из них), то их числа были бы ≥ 10. Но во 2-й раз оба сказали, что их числа „< 10" $\Rightarrow$ противоречие. Остальные восемь могут (1)

C-14

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	X	X	21

11.8



С-14.

1) Опишем вокруг $\triangle PEC$ окр-ть. Выберем на ней точку X, т.ч. CX – биссектриса $\hat{ACB}$

Пусть $X\hat{C}B = \alpha$; $\alpha = X\hat{C}E$. Пусть $\omega = P\hat{C}X$, тогда $\omega = P\hat{E}X$ т.к. $P\hat{E}X$ и $P\hat{C}X$ опираются на одну дугу.

2) Рассм. $\triangle BCX$ и $\triangle ECX$: CX-общее, $X\hat{C}B = X\hat{C}E$, $|BC| = |CE|$ по условию $\Rightarrow \triangle BCX = \triangle ECX \Rightarrow$ $|BX| = |XE| \Rightarrow E\hat{B}X = \omega$ т.к. $\triangle BXE$ – р/б;

Пусть $X\hat{B}C = \beta$, тогда и $X\hat{E}C = \beta$

3) Рассм. $\triangle EPC$, в кём сумма углов $180°$

$\Rightarrow E\hat{P}C = 180° - (\omega + \beta) - (\alpha - \omega) = 180° - \alpha - \beta$.

4) $E\hat{P}C = D\hat{P}B$ как накрест лежащие $\Rightarrow D\hat{P}B = 180° - \alpha - \beta$.

5) $\triangle BDC$ – р/б, значит, $B\hat{D}C = D\hat{C}B = \alpha + \omega$.

6) Рассм. $\triangle DPB$. В кём сумма углов $180°$ $\Rightarrow D\hat{B}P = 180° - (180° - \alpha - \beta) - (\omega + \alpha) = \alpha + \beta - \omega - \alpha = \beta - \omega$.

7) $D\hat{B}X = \beta = X\hat{B}C$, значит, BX – бисс. $D\hat{B}C$.

8) X – точка пересеч. бисс. $\triangle ABC$, т.к. все бисс. пересек. в одной точке, значит, и бисс. $B\hat{A}C$ пройдёт через X. Значит, X – центр вписанной в $\triangle ABC$ окр-ти, т.к. центр впис. окр-ти и есть точка пересеч. биссектрис треугольника.

Продолжение на стр. 2.

11.6 Пусть a – наименьшее из ~~данных~~ данных чисел. Тогда мы имеем a, $(a+1)$, $(a+2)$, $(a+3)$.

1) Пусть a – нечётное. Тогда выберем $a, (a+1), (a+2)$: $s = 3a + 3 = 3\cdot(a+1)$; если a – нечётн, то $(a+1)$ – чётн, значит, $(a+1) \vdots 2$, т.е. $s = 3\cdot 2\cdot \frac{a+1}{2}$; $\frac{a+1}{2} \neq 2, 3$ т.к. $a > 100$. Значит, если a – нечётн, то мы можем выбрать 3 числа, сумма кот. будет представлена так: $s = 3\cdot 2\cdot \frac{a+1}{2}$